ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC

LÊ THỊ TÌNH

CÁC BẤT ĐẲNG THỨC ĐẶC TRƯNG CỦA KHÔNG GIAN BANACH LỒI ĐỀU VÀ TRƠN ĐỀU

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

Thái Nguyên - 2015

ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC

LÊ THỊ TÌNH

CÁC BẤT ĐẲNG THỨC ĐẶC TRƯNG CỦA KHÔNG GIAN BANACH LỒI ĐỀU VÀ TRƠN ĐỀU

Chuyên ngành: Toán ứng dụng
Mã số: 60 46 01 12

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

Người hướng dẫn khoa học:

GS. TS. NGUYỄN BƯỜNG

Thái Nguyên - 2015

Mục lục

Lời cam đoan

Tác giả luận văn xin cam đoan về tính trung thực, tính đúng đắn và hợp pháp của luận văn. Đây không phải là sự sao chép bất cứ luận văn nào đã có trước đó, mà là sự tham khảo, tổng hợp và trình bày theo suy nghĩ chủ quan của tác giả luận văn về những kết quả khoa học đã có liên quan tới chủ đề đặt ra cho luận văn.

Thái Nguyên, tháng 04 năm 2015

Học viên

Lê Thị Tình

LỜI NÓI ĐẦU

Luận văn trình bày các kết quả chủ yếu về các bất đẳng thức của không gian Banach lồi đều và trơn đều.

Dù đã rất nghiêm túc và cố gắng thực hiện luận văn này nhưng do thời gian và trình độ hạn chế chắc chắn không tránh khỏi thiếu sót nhất định. Kính mong sự góp ý của các thầy cô và các bạn để luận văn hoàn chỉnh và nhiều ý nghĩa hơn.

Lê Thị Tình

Học viên Cao học Toán Khóa 7: 2013-2015

Chuyên ngành Toán ứng dụng

Trường Đại học Khoa học - Đại học Thái Nguyên

Lời cảm ơn

Luận văn này được thực hiện và hoàn thành tại Trường Đại học Khoa học - Đại học Thái Nguyên. Tác giả xin chân thành cảm ơn các thầy cô giáo đã tận tình giảng dạy, bồi dưỡng kiến thức trong suốt quá trình học tập, nghiên cứu và rèn luyện tại trường.

Tác giả xin tỏ lòng biết ơn sâu sắc tới GS.TS Nguyễn Bường đã tận tình hướng dẫn trong suốt quá trình viết luận văn.

Xin chân thành cảm ơn.

Thái Nguyên, 2015 **Lê Thị Tình**

Học viên Cao học Toán Khóa 7: 2013-2015
Trường ĐH Khoa học - ĐH Thái Nguyên

Danh sách ký hiệu

$\|.\|$	Không gian định chuẩn
B(X)	Hình cầu đóng tâm 0, bán kính 1
S(X)	Mặt cầu đóng tâm 0, bán kính 1
$\langle .,.\rangle$	Tích vô hướng
$C_{[a,b]}$	Không gian các hàm liên tục
$\mathbb{K}^n$	Không gian Euclid n-chiều

Mở đầu

Như chúng ta đã biết trong không gian Hilbert có đẳng thức hình bình hành

$$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2\left(\|x\|^2 + \|y\|^2\right) \tag{1}$$

và là không gian có cấu trúc đẹp đẽ. Lý do nói như vậy là vì vấn đề đặt ra trong không gian này có thể được phân tích một cách dễ dàng và hoàn chỉnh. Tuy nhiên trong nhiều ứng dụng cần phải xét trên không gian Banach, liệu không gian Banach có tính chất gần và đẹp đẽ như không gian Hilbert không?

Mục đích của luận văn này trình bày các đặc trưng dạng tương tự (1) trong không gian Banach lồi đều và trơn đều, không phải là không gian Hilbert.

Bố cục luận văn gồm 2 chương:

Chương I. Một số khái niệm cơ bản.

Chương II. Các bất đẳng thức đặc trưng của không gian Banach lồi đều và trơn đều.

Chương 1

Các khái niệm cơ bản

Chương này trình bày các khái niệm cơ bản thuộc không gian Hilbert và không gian Banach. Trong đó nêu lên các tính chất, ví dụ cụ thể của từng loại không gian.

1.1 Không gian Hilbert

Định nghĩa 1.1. Cho X là một không gian tuyến tính trên $\mathbb{R}$. Một tích vô hướng trong X là một ánh xạ $\langle .,. \rangle$ thỏa mãn các điều kiện sau:

i) $\langle x,x \rangle > 0, \ \forall x \neq 0; \ \langle x,x \rangle = 0 \Longleftrightarrow x = 0;$

ii) $\langle x,y \rangle = \langle y,x \rangle, \ \forall x,y \in X;$

iii) $\langle \alpha x,y \rangle = \alpha \langle x,y \rangle, \ \forall x,y \in X, \ \ \alpha \in \mathbb{R};$

iv) $\langle x+y,z \rangle = \langle x,z \rangle + \langle y,z \rangle, \ \ \forall x,y,z \in X.$

Không gian tuyến tính X cùng với tích vô hướng $\langle .,. \rangle$ được gọi là không gian tiền Hilbert. Không gian tiền Hilbert đầy đủ được gọi là không gian Hilbert.

Tính chất 1.1. Nếu X là không gian tiền Hilbert thì tích vô hướng của nó liên tục trên $X \times X$.

Tính chất 1.2. (Đẳng thức Pythagore). Nếu $x \perp y$ thì

$$\|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2.$$

Một cách tổng quát nếu $x_1, \ldots.., x_n \in X$ với $x_i.x_j = 0$ với mọi $i \neq j$ thì

$$\left\| \sum_{i=o}^{n} x_i \right\|^2 = \sum_{i=1}^{n} \|x_i\|^2,$$

với $\|x\| = \sqrt{\langle x,x \rangle}, \|y\| = \sqrt{\langle y,y \rangle}.$

Tính chất 1.3. (Đẳng thức hình bình hành).

$$\|x+y\|^2+\|x-y\|^2=2\left(\|x\|^2+\|y\|^2\right),\ \ \forall x,y\in X,$$

với $\|x\|=\sqrt{\langle x,x\rangle},\|y\|=\sqrt{\langle y,y\rangle}$.

Ví dụ 1.1. (Không gian Euclide n-chiều). Xét không gian vectơ

$$\mathbb{C}^n=\{x=(x_1,.....,x_n):x_1,.....,x_n\in\mathbb{C}\}.$$

Khi đó dễ có công thức

$$\langle x,y\rangle=\sum_{j=1}^{n}x_j\overline{y_j},x=(x_1,.....,x_n),y=(y_1,....,y_n)\in\mathbb{C}$$

xác định một tích vô hướng trên $\mathbb{C}$. Bởi vì $\mathbb{C}$ là đầy do đó $\mathbb{C}^n$ là đầy với mọi chuẩn, đặc biệt với chuẩn Euclide

$$\|x\|=\left(\sum_{j=1}^{n}\left|x_j\right|^2\right)^{\frac{1}{2}}=\sqrt{\langle x,x\rangle}$$

nên $\mathbb{C}^n$ là một không gian Hilbert.

Ví dụ 1.2. (Không gian l_2). Xét không gian các dãy số bình phương khả tổng

$$l_2=\{x=\{x_n\}_{n\geq 1}:\|x\|_2=\left(\sum_{n\geq 1}|x_n|^2\right)^{\frac{1}{2}}<\infty\}.$$

Vì

$$\sum_{n=1}^{\infty}|x_ny_n|\leq\frac{1}{2}\left(\sum_{n=1}^{\infty}|x_n|^2+\sum_{n=1}^{\infty}|y_n|^2\right)$$

nên dễ thấy, công thức

$$\langle x,y\rangle=\sum_{n=1}^{\infty}x_n\overline{y_n},\ \ x,y\in l_2,$$

xác định một tích vô hướng trên l_2. Mặt khác, do

$$\|x\|_2=\sqrt{\langle x,x\rangle},\ \ x\in l_2$$

nên l_2 là đầy với chuẩn này và do đó l_2 là một không gian Hilbert.